Alcuni esercizi svolti - Modulo 1

1. Dopo aver verificato che le scritture 1+(0·0) e (1+0) · (1+0) rappresentano lo stesso numero, così come queste altre: (3·7)+0 e (3+0) · (7+0), si può concludere che vale la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione?
   Sol.: Verifichiamo che le scritture rappresentino lo stesso numero:

   $$1 + (0{\cdot}0) = 1 + 0 = 1, \quad (1 + 0){\cdot}(1 + 0) = 1{\cdot}1 = 1$$

   e

   $$(3{\cdot}7) + 0 = 21 + 0 = 21, \quad (3 + 0){\cdot}(7 + 0) = 3{\cdot}7 = 21.$$

   Per risolvere l'esercizio basta trovare un controesempio in cui l'ipotetica proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione non vale. Consideriamo ad esempio (3·7)+2=21+2=23. Se valesse la proprietà dovrebbe essere (3+2)·(7+2)=5·9=45≠ 23. Quindi possiamo concludere che tale proprietà non vale.

2. Se il numero naturale a è minore del numero naturale b, si può concludere che il successivo di a è minore di b? Si può concludere che il successivo di a è minore del successivo di b? **Sol.:** Si vorrebbe dimostrare che se $a < b$ allora $a + 1 < b$. Si scelga $b = a + 1$, che verifica la condizione $a < b = a + 1$. Si controlli ora se $a + 1 < b$: ma $a + 1$ non è minore stretto di $b = a + 1$. Per la seconda parte dell'esercizio, se $a < b$ allora $a + 1 < b + 1$, tale implicazione risulta vera per la proprietà di monotonia rispetto all'addizione.

3. Considera l'insieme NP dei numeri naturali pari: NP = $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ e l'insieme ND dei numeri naturali dispari: ND = $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$. L'insieme NP è chiuso rispetto all?addizione? E rispetto alla moltiplicazione? E l'insieme ND?
   Sol.: Consideriamo NP. Siano due numeri pari $2n, \quad 2m \quad n, m \in \mathcal{N}$. Allora $2n + 2m = 2(n + m) \in NP$, e $2n{\cdot}2m = 4nm = 2(2nm) \in NP$. Per tanto NP è chiuso rispetto alla moltiplicazione e addizione. Passiamo a ND. Siano due numeri dispari $2n + 1, \quad 2m + 1 \quad n, m \in \mathcal{N}$. Allora $(2n + 1) + (2m + 1) = 2(n + m + 1) \in NP$ e $(2n + 1)(2m + 1) = 2(2nm + n + m) + 1 \in ND$. Per tanto ND è chiuso solo rispetto alla moltiplicazione.

4. Se a, b indicano le misure, in cm, delle dimensioni di un rettangolo, si sa che l'area del rettangolo, espressa in cm^2, vale a·b. Determina l'espressione letterale che indica l'incremento che subisce l'area del rettangolo quando ciascuna dimensione aumenta di 2 cm. Calcola i valori di quest'espressione in corrispondenza dei seguenti valori attribuiti alle lettere: a = 3, b = 4. **Sol.:** $a \longrightarrow \quad a+2$ e $b \longrightarrow \quad b+2$, allora l'area $A = (a+2)(b+2) = ab+2a+2b+4$. Rispetto all'area ab, si ha un incremento di $2a+2b+4$. Per a = 3, b = 4, si ha $2a+2b+4 = 6+8+4 = 18$.

5. Il numero $(2373^2)^2$ è pari?
Sol.: Si osservi che $(2373^2)^2 = (2373)^4 = (2373)\cdot(2373)\cdot(2373)\cdot(2373)$. Nell'esercizio si è dimostrato che ND è chiuso rispetto alla moltiplicazione, allora si può concludere che $(2373^2)^2$ è dispari.

6. Si risolva la seguente espressione: $\frac{2.\bar{3}}{1.3} + 1.75 - 3.5 =$

$$= \frac{\frac{23-2}{9}}{\frac{13-1}{9}} + \frac{175}{100} - \frac{35}{10} = \frac{21}{12} + \frac{7}{4} - \frac{7}{2} = \frac{7}{4} + \frac{7}{4} - \frac{7}{2} = \frac{7+7-14}{4} = 0.$$

7. L'affermazione *"Di due frazioni positive aventi lo stesso denominatore è maggiore quella che ha numeratore maggiore"* è vera o falsa? **Sol.:** L'affermazione si può scrivere $a > c \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{b}$. Si osservi che $a > c \Leftrightarrow a - c > 0$.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a-c}{b} > 0$$

. Visto che per ipotesi, sia b che $a - c$ sono positivi, anche $\frac{a-c}{b}$ lo è e quindi l'affermazione è vera.

8. L'affermazione *"0.75 litri di vino costano 3.6 €. Di conseguenza 1 litro di vino costa 4.8 €"* è vera o falsa? **Sol.:**

$$0.75 : 3.6 = 1 : x, \quad x = \frac{3.6}{0.75} = 4.8€$$

9. L'affermazione *"Il* 30% *del* 70% *di un numero A è uguale al* 21% *di A "* è vera o falsa? **Sol.:** $0.3(0.7A) = 0.21A = 21\%A$

10. $\frac{127}{63}$ è numero compreso tra

- 0 e 1
- 1 e 2
- 2 e 3?

Sol.: $127 = 63\cdot 2 + 1$, allora $\frac{127}{63}$ è numero compreso tra 2 e 3.

11. Qual è il maggiore tra 10^{18} e 18^{10}?
Sol.:

$$10^{18} > 18^{10} \Leftrightarrow \frac{10^{18}}{18^{10}} > 1 \Leftrightarrow 10^8\Big(\frac{10}{18}\Big)^{10} > 1 \Leftrightarrow 10^8\Big(\frac{5}{6}\Big)^{10} > 1 \Leftrightarrow 10^8\Big(\frac{5}{6}\Big)^{8}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{2} > 1$$

$$\Leftrightarrow \Big(\frac{25}{3}\Big)^{8}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{2} > 1 \Leftrightarrow \Big(\frac{25}{3}\frac{5}{6}\Big)^{2}\Big(\frac{25}{3}\Big)^{6} \Leftrightarrow \Big(\frac{125}{18}\Big)^{2}\Big(\frac{25}{3}\Big)^{6} > 1$$

$\Big(\frac{125}{18}\Big)^{2}\Big(\frac{25}{3}\Big)^{6}$ è maggiore di 1 perchè prodotto di due numeri maggiori di 1, quindi $10^{18} > 18^{10}$.

12. Poiché una yarda equivale a 0.914 metri, a quante yarde equivale un chilometro? **Sol.:** $1 : 0.914 = x : 1000, \quad x = 1000/0.914 \simeq 1094$m= 1.094km.

13. Un vecchio patriarca ha 60 nipoti, la metà dei quali ha meno di 10 anni. Un quinto dell?altra metà ha un?età compresa fra i 10 e i 20 anni. Dei nipoti che rimangono, un quarto ha tra i 20 e i 30 anni e un terzo ha fra i 30 e i 40 anni. Scrivi l?espressione numerica che sintetizza le operazioni che permettono di calcolare quanti nipoti hanno più di 40 anni. **Sol.:**

- $\frac{1}{2}60 <$ 10 anni("$<$ 10 anni" da intendere come *età minore di 10 anni*)
- anni $10 < \frac{1}{5}(\frac{1}{2}60) < 20$(età compresa tra i 10 e i 20 venti anni), ne restano $\frac{1}{2}60 - \frac{1}{5}(\frac{1}{2}60)$
- $20 < \frac{1}{4}[\frac{1}{2}60 - \frac{1}{5}(\frac{1}{2}60)] < 30$
- $30 < \frac{1}{3}[\frac{1}{2}60 - \frac{1}{5}(\frac{1}{2}60)] < 40$, allora i

maggiori di 40 sono $\frac{1}{2}60 - \frac{1}{5}(\frac{1}{2}60) - \frac{1}{4}[\frac{1}{2}60 - \frac{1}{5}(\frac{1}{2}60)] - \frac{1}{3}[\frac{1}{2}60 - \frac{1}{5}(\frac{1}{2}60)]$

14. Si calcoli l'espressione: $\Big(\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2$.
Sol.:

$$\Big(\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 = 3+\frac{4}{3}-4-\frac{1}{2}(2+\frac{1}{2}-2) = \frac{4}{3}-1-\frac{1}{4} = \frac{16-12-3}{12} = \frac{1}{12}.$$

15. Si calcoli $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.
Sol.:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2-(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} =$$

$$= \frac{2+1-2\sqrt{2}-(2+1+2\sqrt{2})}{2-1} = \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{1} = -4\sqrt{2}$$